

# افشین خاصه خان دارویی برای علاج ب.م.م

سلام بچه‌ها. به درمانگاه ریاضی خوش آمدید. امیدوارم از دست این ویروس سمج و ناشناخته جان سالم به در برده باشید و بانگیزه و علاقه به سراغ درس‌هایتان بروید. در دوران بعد از قرنطینه، مهدی و رمز یار (پسر دوستم) که دانش آموز پایه هفتم است، به من مراجعه کرد. مهدی در مفهوم و محاسبه ب.م.م. و ک.م.م. دو عدد به مشکل برخورد کرده بود.

مهدی با سرعت شروع کرد به نوشتن: «شمارنده‌های ۷: ۷، ۱»، «شمارنده‌های ۱۰: ۱، ۲، ۵»، «شمارنده‌های ۶: ۲، ۳، ۶» و «شمارنده‌های ۱۳: ۱، ۱۳».

گفتم: «بسیار خوب، اینا چه شباهت‌ها و تفاوت‌هایی با هم دارند؟ می‌تونید دسته‌بندی شون کنی؟»

گفت: «۷ و ۱۳ شبیه هم‌اند، هر دوشون فقط دو شمارنده دارند: یک و خودشون. ولی ۱۰ و ۱۲ مقسوم‌علیه‌های دیگه‌ای هم دارند.»

گفتم: «۷ و ۱۳ با اون ویژگی که گفتی، بهشون می‌گن عدد اول، و ۶ و ۱۰ رو می‌گن عدد ...»

مهدی گفت: «مرکب». بعد گفت: «پس عددهای طبیعی دو گونه‌اند، دسته‌ها؟»

گفتم: «عجله نکن. یه عدد دیگه می‌گم، شمارنده‌هاشو بنویس: عدد ۱. مهدی کمی مکث کرد و گفت: «آقا شمارنده ۱ فقط خودشه ... آه آه آه آه آه آه آه آه الان یادام اومد. معلمون می‌گفت: ۱ نه اوله و نه مرکب. پس عددهای طبیعی به سه دسته تقسیم می‌شن: عدد ۱، عددهای اول و عددهای مرکب.»

گفتم: «حالا شد.»

مهدی پرسید: «خب آقا الان اینا چطور مشکل منو حل می‌کنن؟»

یه عدد مرکب بگو.

همین ۱۲.

می‌تونن اونو به صورت حاصل ضرب چند عدد اول بنویسن؟

نوشت: « $۱۲ = ۴ \times ۳$ » بعد کمی مکث کرد و گفت: «۴ که اول نیست.» بعد نوشت: « $۱۲ = ۲ \times ۲ \times ۳$ »

حالا خودت ببین مقسوم‌علیه‌های ۱۲ چطور از ضرب این سه عدد ساخته می‌شن.

الان متوجه شدم! مثلاً  $۴ = ۲ \times ۲$  یا  $۶ = ۲ \times ۳$  و ...

گفتم: «خب حالا عددهای اول رو توی یه مجموعه نشون بده.»

شروع کرد به نوشتن:  $p = \{۲, ۳, ۵, ۷, ۱۱, ۱۳, ۱۷, ۱۹, \dots\}$  به او گفتم: «اگه می‌خواهی شمارنده‌های یه عدد بزرگ‌تر رو بنویسی، می‌تونن از مجموعه بالا کمک بگیری. مثلاً برای نوشتن شمارنده‌های عدد ۲۴ اول باید ببینی ۲۴ به ترتیب به کدام یک از عددهای اول بالا بخش پذیره.»

فقط ۲ و ۳.

ابتدا از او پرسیدم: «می‌دونی منظور از ب.م.م. و ک.م.م. چیه و اینا مخفف چه عباراتی‌اند؟»

مهدی گفت: «ب.م.م. بزرگ‌ترین (مقسوم‌علیه یا مضرب) مشترکه.»

پرسیدم: «م.م.م. مقسوم‌علیه شد یا مضرب؟»

گفت: «آقا راستش قاطی می‌کنم. الانم شک دارم. یعنی حفظ کرده بودم، اما زود یادم می‌ره. ک.م.م. هم یعنی کوچک‌ترین (مقسوم‌علیه یا مضرب) مشترک.»

می‌دونی مقسوم‌علیه یعنی چی؟

نمی‌دونم، ولی اینو می‌دونم که ۳ مقسوم‌علیه ۱۲ می‌شه.

مقسوم‌علیه‌های دیگه ۱۲ رو می‌تونن بگی؟

می‌تونم بنویسم: ۱، ۲، ۳، ۴، ۶، ۱۲.

به نظرت این عددها چه ویژگی مشترکی با هم دارند؟

۱۲ بر همه‌شون بخش پذیره.

همین الان خودت مقسوم‌علیه رو تعریف کردی. مقسوم یه کلمه عربیه به معنی قابل تقسیم شدن و علیه هم یعنی بر آن.»

حالا فهمیدم مقسوم‌علیه ۱۲ یعنی عددهایی که می‌تونیم ۱۲ رو به اون تقسیم کنیم.»

مقسوم‌علیه یه اسم دیگه‌ای هم داره می‌تونن اونو بگی؟ تو کتابتون هم هست.

شمارنده، ولی چرا شمارنده؟

پرسیدم: «۱۲ چند تا ۳ تایی می‌تونه داشته باشه؟»

گفت: «۴ تا.»

یعنی شما می‌تونن با عدد ۳ دوازده رو بشمری: «دوازده برابر با چهار تا سه تاییه.»

چقدر جالب! تا حالا این طوری نگاه نکرده بودم. دیگه هیچ وقت قاطی نمی‌کنم.

مهدی که خیلی بانگیزه به نظر می‌رسید، گفت: «آقا یه مشکل دیگه هم هست. وقتی عددها بزرگ می‌شن، من در نوشتن شمارنده‌هاشون مشکل دارم. یعنی بعضی‌اشونو جامی ندازم.»

گفتم: «مهدی جان عددهای طبیعی رو که مطمئنم می‌شناسی.»

بله.

چند تا عدد می‌گم، شمارنده‌هاشونو بنویس: ۷، ۱۰، ۶، ۱۳.

# گنگ

- پس بقیه با این دوتا ساخته می‌شن. سعی کن بنویسی:

$$1, 2, 3, \frac{2 \times 2}{4}, \frac{2 \times 3}{6}, \frac{2 \times 2 \times 2}{8}, \frac{2 \times 2 \times 3}{12}, \frac{2 \times 2 \times 2 \times 2}{16}$$

ادامه دادم: «مهدی جان الان موقع شسه که ب.م.م. دو عدد رو با هم به بحث بذاریم.»

گفت من آماده‌ام. پرسیدم: «الان می‌تونی بگی ب.م.م. دو عدد یعنی چی؟»

پاسخ داد: «یعنی بزرگ‌ترین مقسوم‌علیه مشترک دو عدد.»

آگه بخوایم کلمه به کلمه انجام بدیم، چه کار باید بکنیم؟

مقسوم‌علیه‌های دو عدد رو بنویسیم، بعد مشترک‌ها رو جدا کنیم و از بین اونا، بزرگ‌ترین رو انتخاب کنیم.

آفرین گفتم و از او خواستم ب.م.م. دو عدد ۲۴ و ۶۰ را محاسبه کند. چنین نوشت:

$$\text{مقسوم‌علیه‌های } 24: 1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 24$$

$$\text{مقسوم‌علیه‌های } 60: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 10, 12, 15, 20, 30, 60$$

$$\text{مقسوم‌علیه‌های مشترک } 1, 2, 3, 4, 6, 12$$

$$\text{بزرگ‌ترین مقسوم‌علیه مشترک } 12 = 60 : 5$$

پرسیدم: «می‌تونی با بیان ساده معنی  $12 = 60 : 5$  رو بگی؟»

بزرگ‌ترین عددیه که هم‌زمان ۲۴ و ۶۰ بر اون تقسیم می‌شن.

می‌تونی بگی کوچک‌ترین مقسوم‌علیه مشترک دو عدد وجود داره یا نه؟

به سرعت گفت: «معلومه که وجود داره و همیشه با ۱ برابره. پس به همین دلیله که ما همیشه به دنبال بزرگ‌ترین مقسوم‌علیه مشترک دو عدد هستیم!»

بعد مهدی پرسید: «استاد روش دیگه‌ای هم برای پیدا کردن ب.م.م. وجود داره؟»

جواب دادم: «آگه کتابتو با دقت می‌خوندی، متوجه می‌شدی که برای این کار باید ۲۴ و ۶۰ رو به‌صورت حاصل‌ضرب عددهای اول بنویسی.»

$$\left\{ \begin{array}{l} 24 = 2 \times 2 \times 2 \times 3 \\ 60 = 2 \times 2 \times 3 \times 5 \end{array} \right.$$

گفتم: «حالا باید عددهای اول رو با تعداد کمتر انتخاب کنی. یعنی عدد اول ۲ در ۲۴ سه تا و در ۶۰ دو تا وجود داره. پس دو تا ۲ انتخاب می‌کنیم. عدد اول ۳ در هر دو، یه دونه وجود داره، پس همون یه دونه ۳ رو انتخاب می‌کنیم و عدد اول ۵ در ۲۴ صفر تا و در ۶۰ یه دونه وجود داره، پس عدد ۵ انتخاب نمی‌شه (صفر کمتر از ۱). حالا عددهای اول انتخابی رو در هم ضرب می‌کنیم:  $2 \times 2 \times 3 = 12$ »

با اشتیاق گفت: «چقدر خوب و راحت!»

گفتم: «آگه موافقی بریم سراغ ک.م.م. یا ...»

بلافاصله گفت: «کوچک‌ترین مضرب مشترک.»

مهدی جان می‌دونی مضرب چیه؟

تقریباً می‌دونم که مثلاً مضرب‌های ۵ می‌شه ۵، ۱۰، ۱۵، ۲۰، ۲۵، ...

یعنی از خود عدد شروع می‌شه و به اندازه همون عدد بهش اضافه می‌شه. این عمل به همین ترتیب ادامه پیدا می‌کنه.

اینو انگار خوب بلدی. پس مضرب‌های دو عدد ۵ و ۶ رو بنویس.

مهدی نوشت:

$$\left\{ \begin{array}{l} 5, 10, 15, 20, 25, 30, 35, 40, 45, 50, 55, 60, 65, 70, 75, 80, 85, 90, 95, \dots \\ 6, 12, 18, 24, 30, 36, 42, 48, 54, 60, 66, 72, 78, 84, 90, 96, \dots \end{array} \right.$$

حالا مضرب‌های مشترک ۵ و ۶ رو مشخص کن.

باز هم نوشت: ۳۰، ۶۰، ۹۰، ...

و کوچک‌ترین مضرب مشترک اونا؟

$$\text{و مهدی بدون مکث گفت: «} [5, 6] = 30 \text{»}$$

باز پرسیدم: «به نظرت بزرگ‌ترین مضرب مشترک وجود داره؟»

کمی فکر کرد و گفت: «نه، هر چقدر پیش بریم مضرب‌های مشترک بزرگ و بزرگ‌تر می‌شن.»

بعد مثل اینکه چیزی کشف کرده باشد گفت: «فهمیدم! دیگه هیچ‌وقت ب.م.م. رو بزرگ‌ترین مضرب مشترک نمی‌گم. آقا برای محاسبه ک.م.م. حتماً راه ساده‌تری هم مثل ب.م.م. وجود داره؟»

درست حدس زدی. برای این کار دوباره دو عدد ۲۴ و ۶۰ رو به‌صورت حاصل‌ضرب عددهای اول بنویس:

$$\left\{ \begin{array}{l} 24 = 2 \times 2 \times 2 \times 3 \\ 60 = 2 \times 2 \times 3 \times 5 \end{array} \right.$$

حالا این بار باید عددهای اول رو با تعداد بیشتر انتخاب کنی. خب عدد اول ۲ در ۲۴ سه تا و در ۶۰ دو تا وجود داره، پس سه تا ۲ انتخاب می‌کنیم. عدد اول ۳ در هر دو، یه دونه وجود داره، پس فقط همون یه دونه ۳ انتخاب می‌شه. و عدد اول ۵ در ۲۴ وجود نداره و در ۶۰ یکی وجود داره، پس یه دونه ۵ رو هم انتخاب و همه اونا رو در هم ضرب می‌کنیم:

$$2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 5 = 120$$

مهدی جان سؤال آخرم رو می‌پرسم: دوباره با بیانی ساده  $120 = [24, 60]$  رو معنی کن.

مهدی باطمینان گفت: « $120$  کوچک‌ترین عددیه که هم‌زمان بر ۲۴ و ۶۰ بخش‌پذیره.»

تشویقش کردم و از او خواستم برود و متن کتاب درسی‌اش را با دقت بخواند و فعالیت‌ها، کار در کلاس‌ها و تمرین‌ها را انجام بدهد.